PART3　等差数列と等比数列

3　実数係数の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が 3 つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

Point Pickup

数列 a，b，c が等差数列 $\iff$ $2b=a+c$

数列 a，b，c が等比数列 $\iff$ $b^2=ac$

第 1 講　PART3　確認問題

1　実数係数の 3 次方程式 $2x^3+ax^2+bx+2=0$ が 3 つの実数解 α，β，$\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

$a=$ [アイ]，$b=$ [ウエ]，

$\alpha=$ [オカ]，$\beta=\dfrac{[キ]}{[ク]}$，$\gamma=$ [ケ]

PART3　等差数列と等比数列

3　実数係数の3次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が3つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$ …… ①　　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$ …… ②　　$\alpha\beta\gamma=-8$ …… ③

また，α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$が等差数列をなすとき

$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\beta$　つまり　$\alpha+\gamma=2\beta$ …… ④

③より α，β，γ はすべて負，または2数が正で1数が負である。

α，β，γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より中央の項は β　　よって　$\beta^2=\alpha\gamma$

これと③より　$\beta^3=-8$　　β は実数であるから　$\beta=-2$

このとき，④より　$\alpha+\gamma=-4$　　③より　$\alpha\gamma=4$

したがって，α，γ は2次方程式 $t^2+4t+4=0$ の2つの解である。

$(t+2)^2=0$　より　$t=-2$　　よって　$\alpha=\gamma=-2$

これは $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適

α，β，γ のうち2数が正で1数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，$\alpha<0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ である。

α，β，γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，中央の項は α である。

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$

これと③より　$\alpha^3=-8$　　α は実数であるから　$\alpha=-2$

このとき，④より　$-2+\gamma=2\beta$　　すなわち　$\gamma=2\beta+2=2(\beta+1)$

③より　$\beta\gamma=4$

よって　$2(\beta+1)\beta=4$　　$\beta^2+\beta-2=0$　　$(\beta-1)(\beta+2)=0$

$\beta>0$ より　$\beta=1$　　このとき $\gamma=4$ となり $\alpha<\beta<\gamma$ を満たす

①，②より　$a=-3$，$b=-6$

以上より　$a=-3$，$b=-6$，$\alpha=-2$，$\beta=1$，$\gamma=4$

第1講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-3，ウエ：-3，オカ：-1，キ：1，
ク：2，ケ：2

[解説]

解と係数の関係より [A]

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a}{2}\ \cdots\cdots①$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{b}{2}\ \cdots\cdots②$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{2}{2}=-1\ \cdots\cdots③$$

また，α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$が等差数列をなすとき

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \qquad つまり\quad \alpha+\gamma=2\beta\ \cdots\cdots④$$ [B]

③より，α，β，γ はすべて負，または，2数が正で1数が負である。

(i)　α，β，γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，等比数列の中央の項は　β

よって　$\beta^2=\alpha\gamma$ [C]

これと③より　$\beta^3=-1$

β は実数であるから　$\beta=-1$

このとき，④より　$\alpha+\gamma=-2$

③より　$\alpha\gamma=1$

したがって，α，γ は2次方程式 $t^2+2t+1=0$ の2つの解である。[D]

$(t+1)^2=0$ より　$t=-1$

よって　$\alpha=\gamma=-1$

これは $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適。

(ii)　α，β，γ のうち2数が正で1数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，$\alpha<0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ である。

> [A]　3次方程式の解と係数の関係
> 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると
> $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$，
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$，
> $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

> [B]　数列 a，b，c が等差数列
> $\iff 2b=a+c$

> [C]　数列 a，b，c が等比数列
> $\iff b^2=ac$

> [D]　$a+b=p$，$ab=q$ のとき，a，b は2次方程式 $x^2-px+q=0$ の2つの解である。

α，β，γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，等比数列の中央の項は α である。

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$ [C]

これと③より　$\alpha^3=-1$

α は実数であるから　$\alpha=-1$

このとき，④より　$-1+\gamma=2\beta$

すなわち　$\gamma=2\beta+1$

③より　$\beta\gamma=1$

よって　$\beta(2\beta+1)=1$

$$2\beta^2+\beta-1=0$$

$$(\beta+1)(2\beta-1)=0$$

$\beta>0$ より　$\beta=\dfrac{1}{2}$

このとき $\gamma=2$ となり，$\alpha<\beta<\gamma$ を満たす。

①，②より　$a=-3$，$b=-3$

(i)，(ii)より

$$\boldsymbol{a=-3,\ b=-3,\ \alpha=-1,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=2}$$